



ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນະຖາວອນ

ກະຊວງສຶກສາທິການ ແລະ ກິລາ

ກົມສາມັນສຶກສາ

ທົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງ ຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ

ລະດັບຊາດ ປະຈຳສົກຮຽນ 2017-2018

ວິຊາ ຄະນິດສາດ ເວລາ: 120 ນາທີ

- ໃຫ້ $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ: $x^{123} + y^{123}$
- ໃຫ້ $f(x) = \int_0^{\pi} (\cos 2\theta - x \sin \theta)^2 d\theta$. ຈົ່ງຊອກຄ່າໜ້ອຍສຸດຂອງຕຳລາ $f(x)$
- ໃຫ້ $x + y$; $x - y$; xy ແລະ $\frac{x}{y}$ ເປັນສີ່ພຶດທຳອິດຕາມລຳດັບຂອງອັນດັບທະວີບວກ.
ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງພຶດທຳທີໜ້າ.
- ໃຫ້ຕຳລາ f ກຳນົດໃນ \mathbb{R} ເຊິ່ງວ່າ: $2f(x) + f(1-x) = x^2$. ຈົ່ງຊອກຫາ $f(x)$
- ໃຫ້ a, b, c ເປັນໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ: $x^3 - x - 1 = 0$.
ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ $\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$
- ໃຫ້ z ເປັນຈຳນວນສົນທີ່ຕອບສະໜອງ: $z^2 + z + 1 = 0$.
ຈົ່ງຊອກຫາ $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + \dots + \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right)^2$
- ໃຫ້ອັນດັບ (t_n) ເຊິ່ງວ່າ: $t_1 = 2$ ແລະ $t_{n+1} = \frac{t_n - 1}{t_n + 1}$. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ t_{2018}
- ໃຫ້ມາຕຣິດ $A = \begin{pmatrix} (\tan 30^\circ)^x & -1 \\ (\cotan 60^\circ)^x & 2 \end{pmatrix}$ ແລະ $\det(A) = 9$. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ x

ຄະນະກຳມະການອອກທົວບົດ



ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນະຖາວອນ

ກະຊວງສຶກສາທິການ ແລະ ກິລາ

ກົມສາມັນສຶກສາ

ຂະໜານຕອບທົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ

ລະດັບຊາດປະຈຳສົກຮຽນ 2017-2018

ວິຊາ ຄະນິດສາດ ເວລາ: 120 ນາທີ

ຂໍ້	ຄຳຕອບ
1	ໃຫ້ $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $x^{123} + y^{123}$
	$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = (x - \sqrt{x^2 + 1}) \\ (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})(y - \sqrt{y^2 + 1}) = (y - \sqrt{y^2 + 1}) \end{cases}$ $\begin{cases} -y - \sqrt{y^2 + 1} = x - \sqrt{x^2 + 1} \\ -x - \sqrt{x^2 + 1} = y - \sqrt{y^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow -(x + x) = (y + y) \Rightarrow x = -y$ <p>ຈາກນັ້ນ, ໄດ້: $x^{123} + y^{123} = (-y)^{123} + y^{123} = -y^{123} + y^{123} = 0$</p>
2	ໃຫ້ $f(x) = \int_0^{\pi} (\cos 2\theta - x \sin \theta)^2 d\theta$ ຈົ່ງຊອກຄ່ານ້ອຍສຸດຂອງຕຳລາ $f(x)$
	<p>ຈາກ $f(x) = \int_0^{\pi} (\cos 2\theta - x \sin \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (\cos^2 2\theta - 2x \cos 2\theta \sin \theta + x^2 \sin^2 \theta) d\theta$</p> $f(x) = \int_0^{\pi} \cos^2 2\theta d\theta - x \int_0^{\pi} 2 \cos 2\theta \sin \theta d\theta + x^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta$ $f(x) = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta - x \int_0^{\pi} (\sin 3\theta - \sin \theta) d\theta + x^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$ $f(x) = \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right) \Big _0^{\pi} - x \left(-\frac{1}{3} \cos 3\theta + \cos \theta \right) \Big _0^{\pi} + x^2 \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big _0^{\pi}$ $f(x) = \frac{\pi}{2} x^2 + \frac{4}{3} x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{4}{3\pi} \right)^2 + \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9\pi}$ <p>ດັ່ງນັ້ນ $f_{\min} = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9\pi}$</p>

3	ໃຫ້ $x+y$; $x-y$; xy ແລະ $\frac{x}{y}$ ເປັນສີ່ພຶດທໍາອິດຕາມລຳດັບຂອງອັນດັບທະວີບວກ. ຈົ່ງຊອກຫາພຶດທໍາຫ້າ.
<ul style="list-style-type: none"> • $d = (x-y) - (x+y) = -2y$ • $a_3 = xy = (x+y) + 2(-2y) = x - 3y \dots\dots\dots(1)$ • $a_4 = \frac{x}{y} = (x+y) + 3(-2y) = x - 5y \Leftrightarrow xy - 5y^2 = x \dots\dots\dots(2)$ 	
ເອົາ (1) ແທນໃສ່ (2), ເຮົາໄດ້ $(x-3y) - 5y^2 = x \Leftrightarrow 5y^2 + 3y = 0$	
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{8} \end{cases}$ <p>ສໍາລັບ $y = 0$ ເປັນໄປບໍ່ໄດ້</p> $a_5 = (x+y) + 4(-2y) = x - 7y = -\frac{9}{8} + 4\left(-2\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{123}{40}$	
4	ໃຫ້ຕໍາລາ f ກຳນົດໃນ \mathbb{R} ເຊິ່ງວ່າ : $2f(x) + f(1-x) = x^2$ ຈົ່ງຊອກຫາ :: $f(x)$
$2f(x) + f(1-x) = x^2 \dots\dots\dots(1)$ <p>ເມື່ອແທນ x ດ້ວຍ $1-x$</p> <p>ເຮົາໄດ້ : $2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 \dots\dots\dots(2)$</p> <p>ເອົາ $2(1) - (2) : 3f(x) = x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$</p>	
5	ໃຫ້ a, b, c ເປັນໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ: $x^3 - x - 1 = 0$. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ $\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$
<p>a, b, c ເປັນໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ: $x^3 - x - 1 = 0$.</p> <p>ເຮົາມີ : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+ac+bc=-1 \\ abc=1 \end{cases}$</p> $\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$ $= \frac{(1-a)(1+b)(1+c) + (1-b)(1+a)(1+c) + (1-c)(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)}$ $= \frac{(1-a)(1+b+c+bc) + (1-b)(1+a+c+ac) + (1-c)(1+a+b+ab)}{(1+a)(1+b+c+bc)}$ $= \frac{(1-a)(1-a+bc) + (1-b)(1-b+ac) + (1-c)(1-c+ab)}{1+a+b+c+ab+ac+bc+abc}$ $= \frac{1-2a+bc+a^2-abc+1-2b+ac+b^2-abc+1-2c+c^2+ab-abc}{1+0-1+1}$ $= -1 + (a^2 + b^2 + c^2)$	

	$= -1 + (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = -1 + 2 = 1$
6	ໃຫ້ z ເປັນຈຳນວນສົນທິຕອບສະໜອງ: $z^2 + z + 1 = 0$ ຈົ່ງຊອກຫາ $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + \dots + \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right)^2$
	$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z + \frac{1}{z} = -1$ $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = -1$ $z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2}\right) = (-1)(-1-1) = 2$ $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 = z^4 + \frac{1}{z^4} + 2 \Rightarrow z^4 + \frac{1}{z^4} = -1$ $z^5 + \frac{1}{z^5} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^6 - z^2 + 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^6}\right) = (-1)(-1+1-1) = -1$ $\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)^2 = z^6 + \frac{1}{z^6} + 2 \Rightarrow z^6 + \frac{1}{z^6} = 2$ <p>ດັ່ງນັ້ນ: $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + \dots + \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-1)^2 + (1)^2 + 2^2 = 12$</p>
7	ໃຫ້ອັນດັບ (t_n) ເຊິ່ງວ່າ: $t_1 = 2$ ແລະ $t_{n+1} = \frac{t_n - 1}{t_n + 1}$. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ t_{2018}
	$t_1 = 2$ $t_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$ $t_3 = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1} = -\frac{1}{2}$ $t_4 = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1} = -3$ $t_5 = -\frac{4}{-2} = 2 = t_1$ <p>ຄ່າຂອງ t_1 ຊຳກັນເປັນຮອບວຽນ 4 ດັ່ງນັ້ນ: $t_{2018} = t_2 = \frac{1}{3}$</p>
8	ໃຫ້ມາຕຣິດ $A = \begin{pmatrix} (\tan 30^\circ)^x & -1 \\ (\cotan 60^\circ)^x & 2 \end{pmatrix}$ ແລະ $\det(A) = 9$ ຈົ່ງຫາຄ່າຂອງ x

$$A = \begin{pmatrix} (\tan 30^\circ)^x & -1 \\ (\cotan 60^\circ)^x & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x & -1 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$$

ອີງຕາມຫົວບົດເຮົາມີ : $\det(A) = 9$

$$\text{ເຮົາໄດ້: } 9 = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \Leftrightarrow 3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 1 = -\frac{x}{2} \Rightarrow x = -2$$